

הכתיבה המלאה של רדוקציה פולינומילית

ההצדקה הפורמלית של רדוקציה:

תב"ע $A, B \subseteq \{0,1\}^*$ שגם שפג.

נאמר כי $A \leq_p B$ אם קיימת פונקציה $f: \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$

כך ש f חשיבה בזמן פולינומילי, וזאת $x \in \{0,1\}^*$ מסת"ס:

$$x \in A \iff f(x) \in B$$

$$A = \{ \langle \square, \Delta \rangle \mid \dots \} \quad B = \{ \langle 0, \square, \star \rangle \mid \dots \}$$

מכאן ההוכחה לפי $A \leq_p B$:

נגדיר פונקציה f כך: בהינתן $\langle \square, \Delta \rangle$, f מחזירה $\langle 0, \square, \star \rangle$, כאשר:

$\square' =$

$\Delta' =$

$\star' =$

נשים לב ש- f אכן חשיבה בזמן פולינומילי, כי ...

3.3: לכל $\langle \square, \Delta \rangle \in A$ מתקיים: $\langle f(\square, \Delta) \rangle \in B$ $\Leftrightarrow$ $\langle \square, \Delta \rangle \in A$

הוכחה: יהי $\langle \square, \Delta \rangle \in \{0, 1\}^*$.

($\Rightarrow$) נניח ש $\langle \square, \Delta \rangle \in A$. לכן, לפי הגדרת A , מובטח כי קיים/קיימות ק"מ...
 נסמן אותם ב- $\square$. כעת נוכיח ש $\langle f(\square, \Delta) \rangle \in B$. כלומר, יש
 להוכיח כי $\langle f(\square, \Delta) \rangle \in B$. לשם כך יש להוכיח שקיים/קיימות ק"מ...
 נגדיר אותם כך: $\square$. אכן, מה שהגדרנו עונה על הדרישה
 של השפה B , כי $\square$. ולכן $\langle f(\square, \Delta) \rangle \in B$.
 ולכן $\langle f(\square, \Delta) \rangle \in B$.

($\Leftarrow$) נניח ש $\langle f(\square, \Delta) \rangle \in B$. כלומר - $\langle f(\square, \Delta) \rangle \in B$. לכן, לפי הגדרת B ,
 קיים שקיים/קיימות ק"מ... נסמן אותם ב- $\square$. כעת
 נוכיח ש - $\langle \square, \Delta \rangle \in A$. לשם כך יש להוכיח שקיים/קיימות ק"מ...
 נגדיר אותם כך: $\square$. אכן, מה שהגדרנו עונה על הדרישה
 של השפה A , כי $\square$, ולכן $\langle \square, \Delta \rangle \in A$.

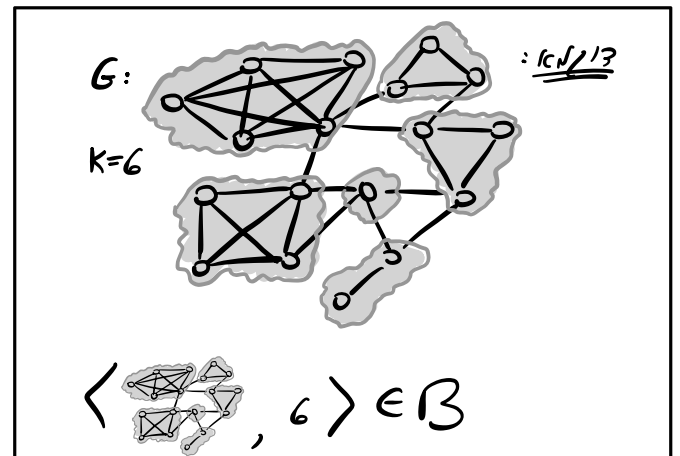
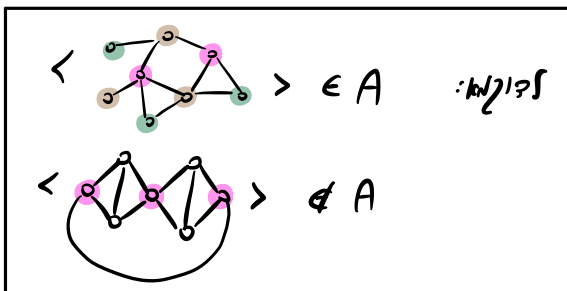
(שים לב:)
 יש להוכיח הדימו -
 הדימו. (הוא אמנם)
 מובטח לזה המקרים
 אך לא כללם.
 למשל: (היא לא גורמת)
 כי שפה B
 היא קפ קשה אך לא
 קפ שלמה.
 והיא מקדמים בהם
 (נכסר להוכיח)
 על הדימו.)

דוגמה #1 לכתיבה מלאה של הוכחה:

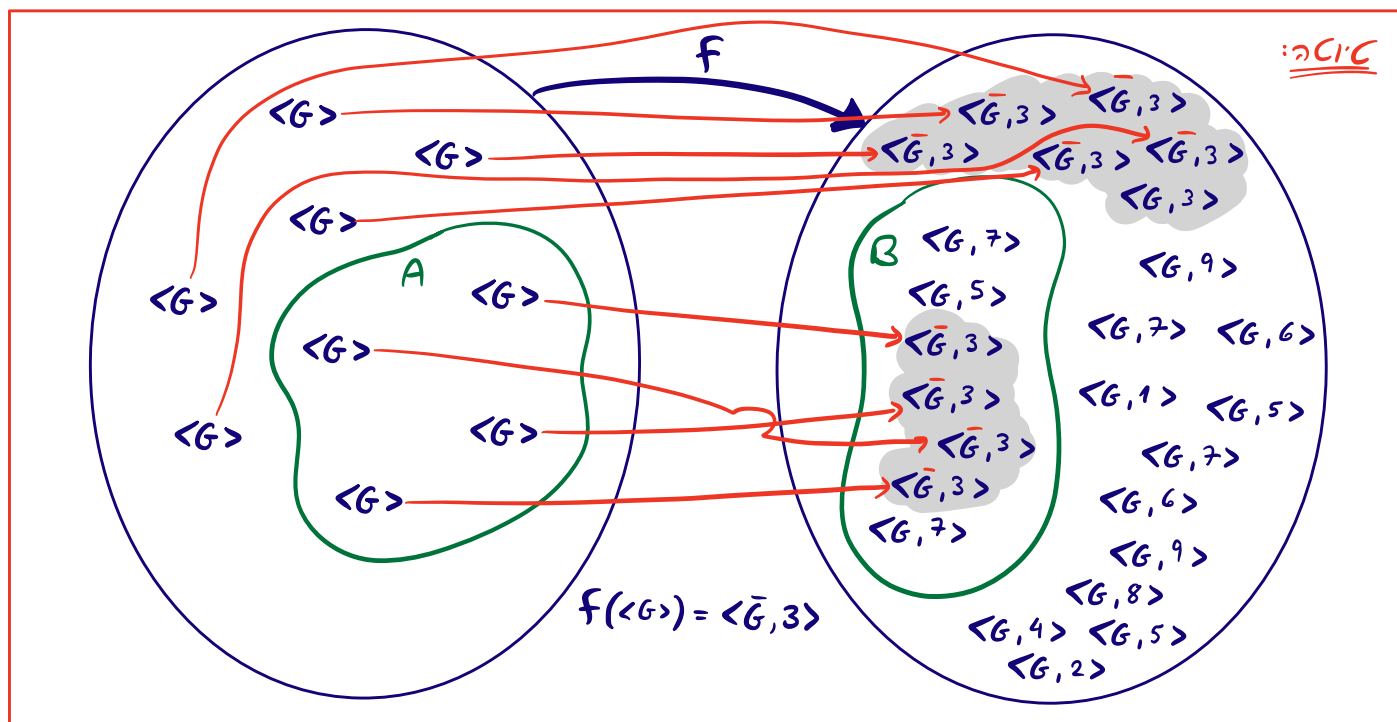
3COLOR

$A = \{ \langle G \rangle \mid \text{יש לה לא מכיל, וק"מ} \}$
 $\text{ז-} \langle G \rangle \text{ צביעה חיקית ב-3 צבעים.}$

$B = \{ \langle G, k \rangle \mid \text{יש לה לא מכיל, א מספר צבעי, וק"מ} \}$
 $\text{וק"מ לקידודי } G \text{ חזיקה}$
 $\text{ס-} k \text{ קבוצת שכולן קצרות}$

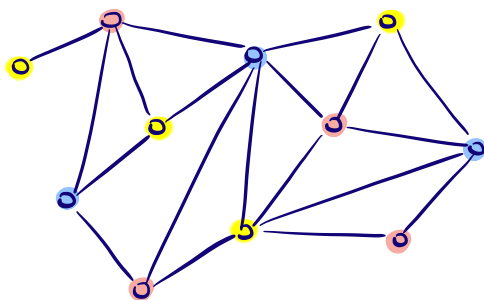


$$A = \{ \langle G \rangle \mid \begin{array}{l} G \text{ לא מכיל, וק"מ} \\ G \text{ - } 1 \text{ צב"ש חקית ב-} \\ \text{צב"ש} \end{array} \} \preceq_p B = \{ \langle G, a \rangle \mid \begin{array}{l} G \text{ לא מכיל, א מספר צב"ש,} \\ \text{וק"מ צב"ש חקית} \\ G \text{ - } \delta \text{ א קבוצה שכל קצות} \end{array} \}$$

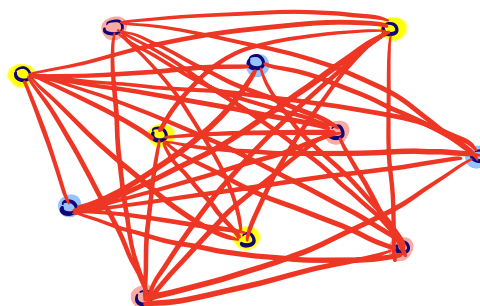


$$A = \{ \langle G \rangle \mid \begin{array}{l} G \text{ לא מכיל, וק"מ} \\ G \text{ - } 1 \text{ צב"ש חקית ב-} \\ \text{צב"ש} \end{array} \} \preceq_p B = \{ \langle G, a \rangle \mid \begin{array}{l} G \text{ לא מכיל, א מספר צב"ש,} \\ \text{וק"מ צב"ש חקית} \\ G \text{ - } \delta \text{ א קבוצה שכל קצות} \end{array} \}$$

$\langle G \rangle$:



הכל המסלול של G:



$$A = \{ \langle G \rangle \mid G \text{ לא מכיל לא מכיל, וקיימת } G\text{-צבעה חוקית ב-3 צבעים} \} \leq_p B = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ מכיל לא מכיל, א מספר צבעי, וקיימת דקדוקי } G \text{ חלוקה } k\text{-א דבולט שכולן קיימות} \}$$

נהדיר פונקציה f כך: בהינתן $\langle G \rangle$, נסמן: $G = (V, E)$

f מחזירה $\langle G', k' \rangle$, כאשר:

$$G' = (V', E') \\ V' = V \\ E' = \{ (u, v) \mid u, v \in V, (u, v) \notin E \}$$

$$k' = 3$$

נשים לב ש- f אכן חסימה בזמן פולינומילי, כי נתן לכתוב את k' בזמן קבוע
נתן לכתוב את G' בזמן פולינומילי ביחס ל- G
כי ב- G' יש ווא קודקודים, ואלו היות $2 \times V$ קטלג

$$\underline{\text{ד.3:}} \text{ אלה } \{0, 1\}^* \text{ מילים } \langle G \rangle \in A \iff f(\langle G \rangle) \in B$$

הוכחה: יהי $\langle G \rangle \in \{0, 1\}^*$.

($\Rightarrow$) נניח $\langle G \rangle \in A$. לכן, לפי הגדרת A , מובטח כי קיימת G -צבעה חוקית ב-3 צבעים.

תצפית: צביעה חוקית ב-3 צבעים היא פונקציה $c: V \rightarrow \{1, 2, 3\}$
כך שלא $(u, v) \in E$ מתקיים: $c(u) \neq c(v)$.

נסמן אותה ב- c (כאשר $c: V \rightarrow \{1, 2, 3\}$). בערך נכתוב ש $f(\langle G \rangle) \in B$. כלומר, יש
להוכיח כי $\langle G', k' \rangle \in B$. לשם כך יש להוכיח שקיימת V' -חלוקה k' -א קיימת.

תצפית: תבוא S קבוצה. חלוקה של S היא קבוצה של תתי קבוצות לא ריקות
של S , כך שלא איבר של S נמצא בדיוק בתתי קבוצה אחת.

נהדיר איגרת $\{S_1, S_2, S_3\}$, כאשר לכל $1 \leq i \leq 3$: $S_i = \{v \mid c(v) = i\}$

אכן, מה שהגדרנו מונה על המגעים של השפה B , כי:

א. לכל $1 \leq i \leq 3$: $S_i \neq \emptyset$ (נחה אם זה יוצא).

ב. כל איבר של S נמצא בדיוק בקבוצה אחת (כי c נמשך את קידוד הביוק צבעי אחד).

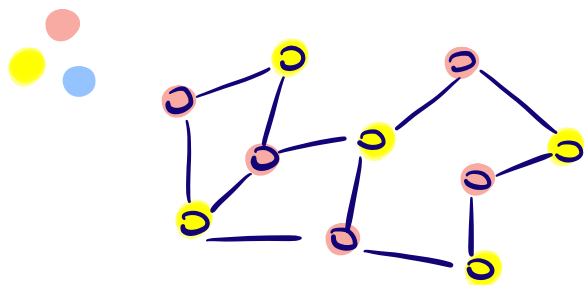
ג. לכל $1 \leq i \leq 3$: S_i היא קבוצה בלתי-ריקה. יהי $1 \leq i \leq 3$. לכל $u, v \in S_i$ מתקיים: $(u, v) \in E'$.

הוכחה: יהיו $u, v \in S_i$ אכן: $c(u) = i = c(v)$.
לכן $(u, v) \notin E$ ולכן $(u, v) \in E'$.

ולכן $\langle G', k' \rangle \in B$, ולכן $f(\langle G \rangle) \in B$.

$$A_i \neq \emptyset : 1 \leq i \leq 3$$

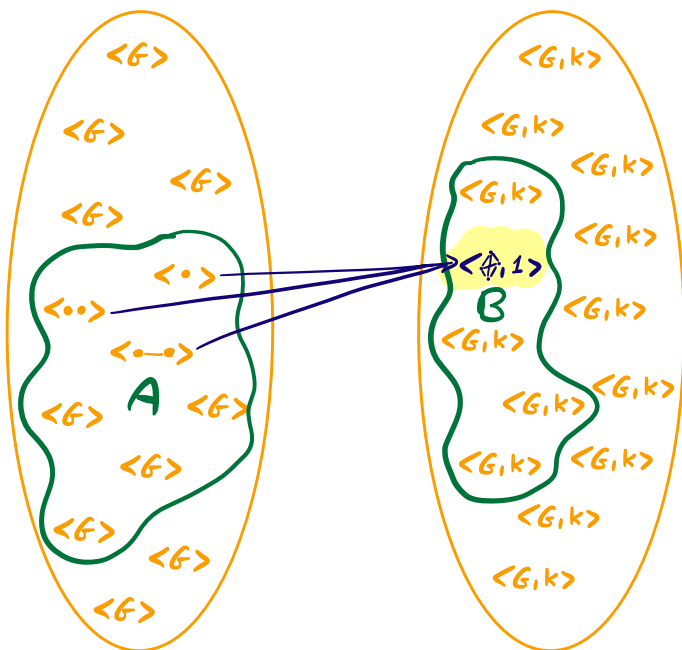
שם לה:



$$c: V \rightarrow \{1, 2, 3\}$$

יתכן כי הצביעה c לא תהיה
 בסיסית בהתאמה הצבעים,
 ולכן צריך להקדים
 צבעים S_1, S_2, S_3 יחידים.
 אך ניתן לבדוק בקלות
 האם קיימת הצבעה כזו.
 קבוצה יחידה.

לשם כך נבין את $|V|$.



אם $|V| < 3$, אז לא ייתכן
 שיהיו $|V| < 3$, ולכן
 צריך להקדים צבעים.

$$f(\langle G \rangle) = \begin{cases} \langle G, 1 \rangle & |V| < 3 \\ \langle G, k \rangle & |V| \geq 3 \end{cases}$$

כפי שהוצגה קודם

3.1: $\langle G \rangle \in A \iff f(\langle G \rangle) \in B$: מופ"ם : $\langle G \rangle \in \{0,1\}^*$

הוכחה: יהי $\langle G \rangle \in \{0,1\}^*$.

($\Leftarrow$) נניח $f(\langle G \rangle) \in B$.

אם מופ"ם $\langle G \rangle$ הוא $\langle 1, 1 \rangle$ אז נדע כי G יש פחות מ-3 קודקודים, ולכן $\langle G \rangle \in A$.
אחרת, נדע ש $\langle G \rangle = \langle G' \rangle$, כזוהי - $\langle G' \rangle \in B$, אכן, לפי ההגדרה B , נדע שקיימת G' חלוקה
ל-3 קבוצות. נסמן אותן S_1, S_2, S_3 (יש בהן 3 קבוצות כי $k=3$).
נניח ש $\langle G \rangle \in A$. לפי קבוצת הקודקודים G צריכה חלוקה ב-3 קבוצות.

נגדיר אותה כך: $c: V \rightarrow \{1,2,3\}$

$$c(v) = \begin{cases} 1 & v \in S_1 \\ 2 & v \in S_2 \\ 3 & v \in S_3 \end{cases}$$

אכן, מה שהקבוצות אונות על הקבוצות של A . על מנת להראות זאת,

יש להוכיח כי c היא אכן צביעה חוקית.

3.2: נניח $(u,v) \in E$ מופ"ם: $c(u) \neq c(v)$.

הוכחה: יהי $(u,v) \in E$. אכן $(u,v) \notin E$. אכן u,v נמצאים בקבוצות שונות בחלוקה.
ולכן לפי ההגדרה c , בהכרח $c(u) \neq c(v)$.

ולכן $\langle G \rangle \in A$.

